MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE **(DGESE)**

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours CAE session 2017

Composition : Mathématiques 2 (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1:

Un test pour le dépistage d'une maladie étant en phase de mise au point, on dispose des précisions suivantes :

— lorsqu'une personne est atteinte de la maladie, le test s'avère positif avec une probabilité de 0,95 ;

— lorsqu'une personne n'est pas malade, le test s'avère quand même positif avec une probabilité de 0,02.

1) On sait que, dans une région donnée, le pourcentage de malades est de 4%. Sachant qu'une personne a un résultat positif au test, calculer la probabilité conditionnelle pour qu'elle soit saine.

2) Cent personnes de cette région (les choix de ces personnes sont supposés indépendants), montent dans un avion. Soit X le nombre de personnes parmi elles qui sont malades.

a) Donner la loi de X , son espérance, et sa variance.

b) Donner la probabilité qu'il y ait au moins une personne malade parmi elles.

3) Sachant qu'il y a au moins une personne malade parmi elles, quelle est la probabilité qu'il y en ait au plus deux ?

Exercice 2 :

On considère deux variables aléatoires X et Y ,définies su un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ). On pose $Z = \max(X, Y)$.

1) Montrer que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x) \ .$$

2) a) Rappeler la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

c) En remarquant que, pour tout réel x , $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, montrer, grâce à une intégration par parties, que : $\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

d) Montrer de même que : $\int_{-\infty}^{0} x f(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt$.

En déduire que Z admet une espérance et donner sa valeur.

3) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

4) Déterminer $E\left(Z^2\right)$, puis donner la valeur de la variance de Z .

Exercice 3 :

On dispose de deux dés : un dé rouge,nonpipé, dont les faces sont numérotées de 1 à 6 ; un dé bleu, non pipé, ayant deux faces marquées 1, deux faces marquées 2, deux faces marquées 3. On lance simultanément les deux dés. On note X et Y les variables aléatoires qui, à chaque lancer des dés, associent respectivement le numéro du dé rouge et celui du dé bleu.

1) Donner la loi de X , la loi de Y.

2) Donner la loi du couple (X,Y) .

3) Un lancer des deux dés est un succès si le total $X+Y$ vaut 2 , 4 ou 6 ; dans le cas contraire, il s'agit d'un échec. Donner la probabilité d'un échec.

4) On note T la variable aléatoire qui, à chaque groupe de 10 lancers, associe le nombre de succès obtenus. Quelle est la loi de T ?

5) Donner l'espérance et la variance de T, ainsi que la probabilité d'avoir obtenu au moins deux succès en 10 lancers.

Corrigé Maths 2 – 2017 :

EXERCICE 1 :

1. On note S l'événement "la personne est saine", M l'événement "la personne est malade", $+$ et $-$ les événements "test positif" et "test négatif". On veut calculer

$$\mathbb{P}[S|+] = \frac{\mathbb{P}[S \cap +]}{\mathbb{P}[+]}.$$

Par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}[+] = \mathbb{P}[+|S]\,\mathbb{P}[S] + \mathbb{P}[+|M]\,\mathbb{P}[M] = \frac{2}{100} \times \frac{96}{100} + \frac{95}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{572}{10000} = \frac{143}{2500}.$$

D'autre part,

$$\mathbb{P}[S \cap +] = \mathbb{P}[+|S]\,\mathbb{P}[S] = \frac{2}{100} \times \frac{96}{100} = \frac{48}{2500}.$$

Donc, $\mathbb{P}[S|+] = \frac{48}{143}$ (ce qui est un taux relativement élevé de "faux positifs").

2. La variable X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100, 1/25)$. Son espérance est $\mathbb{E}[X] = np = 100 \times \frac{1}{25} = 4$, et sa variance est $\mathrm{var}(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{1}{25} \times \frac{24}{25} = \frac{96}{25}$. La probabilité pour que $X \geq 1$ est

$$\mathbb{P}[X \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[X = 0] = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^{100}.$$

3. La probabilité pour que X soit égale à 1 ou 2 est

$$\mathbb{P}[X = 1] + \mathbb{P}[X = 2] = \binom{100}{1} \frac{1}{25} \left(\frac{24}{25}\right)^{99} + \binom{100}{2} \left(\frac{1}{25}\right)^{2} \left(\frac{24}{25}\right)^{98} = \frac{294}{25} \left(\frac{24}{25}\right)^{98}.$$

On conclut que $\mathbb{P}[1 \leq X \leq 2 | 1 \leq X] = \frac{294}{25} \frac{\left(\frac{24}{25}\right)^{98}}{1-\left(\frac{24}{25}\right)^{100}}$.

EXERCICE 2 :

On pose $Z = \max(X, Y)$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, ainsi que son espérance et sa variance.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= P([X \leq x] \cap [Y \leq x]) \\ &= P(X \leq x)P(Y \leq x) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= \Phi(x)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $F_Z(x) = \Phi(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc F_Z est continue et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Z est donc une variable aléatoire à densité définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(b) Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. On fait le changement de variable affine (donc licite) suivant dans cette intégrale $t = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$. On a $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}}$ et :

$$u : -\infty \to +\infty \quad \text{quand} \quad t : -\infty \to +\infty.$$

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u/\sqrt{2})^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}}$ sont de même nature, c'est à dire convergentes, et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u/\sqrt{2})^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$$

(c) Pour tout réel x, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{2x}{2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x).$$

Soit $A \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^A 2x\varphi(x)\Phi(x)\mathrm{d}x = -2\int_0^A \varphi'(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$$

On procède alors à une intégration par parties :

$$\begin{array}{c|lcl} + & \Phi(x) & & \varphi' \\ & & \searrow & \\ - & \Phi'(x) & \xleftarrow{\int} & \varphi(x) \end{array}$$

Les fonctions Φ et φ sont bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \int_0^A xf(x)\mathrm{d}x &= -2\left[\Phi(x)\varphi(x)\right]_0^A + 2\int_0^A \varphi(x)\Phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= 2\Phi(0)\varphi(0) - 2\Phi(A)\varphi(A) + 2\int_0^A \varphi(x)^2\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 2\Phi(A)\varphi(A) + 2\int_0^A \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - 2\Phi(A)\varphi(A) + \frac{1}{\pi}\int_0^A e^{-x^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a enfin $\lim\limits_{A\to+\inf} \Phi(A) = 1$ et $\lim\limits_{A\to+\inf} \varphi(A) = 0$, et comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge (vu en 3.(b)), on en déduit en passant à la limite quand $A \to +\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

(d) Soit $B \in \mathbb{R}$, faisons la même intégration par parties entre B et 0 :

$$\begin{aligned} \int_B^0 xf(x)\mathrm{d}x &= 2\Phi(B)\varphi(B) - 2\Phi(0)\varphi(0) + 2\int_B^0 \varphi(x)^2\mathrm{d}x \\ &= 2\Phi(B)\varphi(B) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_B^0 e^{-x^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{B\to-\inf} \Phi(B) = 0$ et $\lim\limits_{B\to-\inf} \varphi(A) = 0$, et comme l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt$ converge (vu en 3.(b)), on en déduit en passant à la limite quand $B \to -\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\int_{-\infty}^0 xf(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}dt.$$

Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xf(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ convergent. On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente, et que (Chasles dans les intégrales convergentes) :

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt + -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leq x).$$

Si $x < 0$, $[X^2 \leq x] = \emptyset$, et donc $F_{X^2}(x) = 0$. Supposons à présent $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
F_{X^2}(x) &= P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\
&= P(X \leq \sqrt{x}) - P(X < -\sqrt{x}) \\
&= P(X \leq \sqrt{x}) - P(X \leq -\sqrt{x}) \text{ car } X \text{ continue} \\
&= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) \\
&= \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) \\
&= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1
\end{aligned}$$

Cherchons à présent la loi de Z^2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_{Z^2}(x) = P(Z^2 \leq x).$$

Si $x < 0$, $[Z^2 \leq x] = \emptyset$, et donc $F_{Z^2}(x) = 0$. Supposons à présent $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
F_{Z^2}(x) &= P(Z^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \\
&= P(Z \leq \sqrt{x} - P(Z < -\sqrt{x} \\
&= P(Z \leq \sqrt{x} - P(Z \leq -\sqrt{x} \text{ car } Z \text{ continue} \\
&= \Phi(\sqrt{x})^2 - \Phi(-\sqrt{x})^2 \\
&= \Phi(\sqrt{x})^2 - (1 - \Phi(\sqrt{x}))^2 \\
&= \Phi(\sqrt{x})^2 - 1 - \Phi(\sqrt{x})^2 + 2\Phi(\sqrt{x}) \\
&= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1
\end{aligned}$$

Ainsi X^2 et Z^2 ont même fonction de répartition, et donc suivent la même loi.

4. Puisque X^2 et Z^2 suivent la même loi, $E(Z^2) = E(X^2)$. On doit donc obtenir le moment d'ordre 2 de X. Or $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc on a (formule de Huygens) :

$$E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1 + 0 = 1$$

On en déduit donc que $E(Z^2) = 1$, et donc par la formule de Huygens :

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 - \frac{1}{\pi} = \frac{\pi - 1}{\pi}.$$

EXERCICE **3 :**

1) X suit la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,6\}$: $\forall k \in \{1,2,\dots,6\}$, $P(X=k)=\frac{1}{6}$.

Y suit la loi uniforme sur $\{1,2,3\}$: $\forall k \in \{1,2,3\}$, $P(X=k)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2) X et Y étant indépendantes (lancers simultanés de 2 dés non pipés), on a :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,\dots,6\} \times \{1,2,3\} \ , \ P(X=i;Y=j)=P(X=i).P(Y=j)=\frac{1}{18}.$$

3) Soit l'évènement $S : "(X+Y) \in \{2,4,6\}"$.

$$p=P(S)=P(X+Y=2)+P(X+Y=4)+P(X+Y=6)=\frac{1}{18}+\frac{3}{18}+\frac{3}{18}=\frac{7}{18}.$$

D'où la probabilité d'un échec est : $q=1-p=\frac{11}{18}$.

4) Chaque lancer donne soit un succès (réalisation de S de probabilité $\frac{7}{18}$) , soit un échec. Les lancers étant indépendants les uns des autres, T suit la loi binomiale de paramètres $\left(10,\frac{7}{18}\right)$. $\qquad \forall k \in \{0,1,\dots,10\}$, $P(T=k)=C_n^k\left(\frac{7}{18}\right)^k\left(\frac{11}{18}\right)^{10-k}$.

5) $E(T)=np=10\text{x}\frac{7}{18}=\frac{70}{18}=3{,}89.$ et $V(T)=np(1-p)=10\text{x}\frac{7}{18}\text{x}\frac{11}{18}=\frac{770}{18^2}=2{,}38.$

$$P(T\geq 2)=1-\left[P(T=0)+P(T=1)\right]=1-\left[\left(\frac{11}{18}\right)^{10}+\frac{7}{18}\left(\frac{11}{18}\right)^{9}\right].$$